

Control IDA-PBC de un Vehículo Submarino Subactuado

Diego García^a, Jesús Sandoval^{a,*}, Joaquín Gutiérrez–Jagüey^b, Eusebio Bugarin^c

^aTecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Paz, Blvd. Forjadores de B. C. S., No. 4720, La Paz, B.C.S., México.

^bCentro de Investigaciones Biológicas del Noroeste S.C. (CIBNOR), Instituto Politécnico Nacional, No. 195, Playa Palo de Santa Rita Sur, La Paz, B.C.S., México.

^cTecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Ensenada, Boulevard Tecnológico, No. 150, Ex-Ejido Chapultepec, Ensenada, B.C., México.

Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de un IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Control) para la regulación de un vehículo submarino subactuado. Se consideran seis grados de libertad y cuatro propulsores como actuadores, lo cual es un desafío para su control de movimiento. Específicamente, el IDA-PBC diseñado permite llevar el vehículo a una profundidad y orientación deseadas y constantes. Resultados de simulación sobre el modelo del vehículo submarino utilizado validan el desempeño del sistema de control propuesto.

Palabras Clave:

Vehículo submarino, sistema subactuado, control no lineal, IDA-PBC.

IDA-PBC Control of an Underactuated Underwater Vehicle

Abstract

This paper presents an IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Control) for underactuated underwater vehicle control, which it has more degree of freedom than actuators. In this proposal, six degree of freedom and only four propels as actuators are considered, which it offers a main control challenge. Specifically, the IDA-PBC proposed drives the vehicle towards a desired deep and orientation. Simulation results on a vehicle model validate the performance of the control scheme proposed.

Keywords:

Underwater vehicle, underactuated system, non-linear control, IDA-PBC.

1. Introducción

El control de movimiento de un vehículo submarino se basa comúnmente en el conocimiento de su ubicación con respecto a un marco de referencia fijo y en el arreglo del sistema de propulsión para su manejo. Existen algunos resultados en la literatura sobre vehículos submarinos que abordan tópicos diversos como: conceptos, elementos, modelado y control (Moreno et al., 2014), así como de la automática marina desde el punto de vista del control (de la Cruz et al., 2012). En particular, sobre el control de vehículos submarinos no tripulados se destacan los siguientes esquemas de control: PID (Santhakumar and Asokan, 2010), por modos deslizantes (Healey and Lienard, 1993), basado en técnicas heurísticas (Eski and Yildirim, 2014;

Shi et al., 2007), difuso (González et al., 2015), por moldeo de energía (Borja and Espinosa, 2013), (Donaire and Pérez, 2010), (Donaire and Pérez, 2012), (Valentinis et al., 2013), (Valentinis et al., 2015a) y (Valentinis et al., 2015b), y por IDA-PBC (Pérez et al., 2013; Akcakaya and Sumer, 2013).

Por otro lado, IDA-PBC es un método de diseño de controladores para regulación de una clase de sistemas mecánicos subactuados introducido por (Ortega et al., 2002). Extensiones de esta metodología también pueden verse en (Ortega and García-Canseco, 2004). El método IDA-PBC está basado en una formulación hamiltoniana; en formulación lagrangiana se tiene un método similar llamado *lagrangiano controlado* (Bloch et al., 2001). Ambos métodos se basan en conceptos de

*Autor para correspondencia: jsandoval@itlp.edu.mx

To cite this article: Diego García, Jesús Sandoval, Joaquín Gutiérrez–Jagüey, Eusebio Bugarin. 2017. IDA-PBC Control of an Underactuated Underwater Vehicle. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 15 (2018) 36-45. <https://doi.org/10.4995/riai.2017.8829>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4,0 International (CC BY-NC-ND 4,0)

energía, tanto para el diseño de la ley de control como para el análisis de estabilidad del sistema en malla cerrada. Referencias sobre aplicaciones del método IDA-PBC pueden encontrarse en (Gómez-Estern, 2002), (Morillo and Arteaga., 2007), (Balebona and Jenry, 2009), (Kotyczka and Lohmann, 2009), (Acosta and Ríos-Bolívar, 2010), (Sandoval and Kelly, 2013; Sandoval et al., 2011), (Cornejo, 2010), (Gómez-Estern et al., 2001), (Ortega et al., 2008) y (Yüksel et al., 2014). A diferencia de (Pérez et al., 2013) y (Akçakaya and Sumer, 2013), en este trabajo se propone un esquema de control a partir de una dinámica deseada en malla cerrada considerando todos los grados de libertad del vehículo (tres grados de libertad para la posición y tres grados de libertad para la orientación). Los elementos principales de la ley de control diseñada corresponden a las soluciones de un conjunto de ecuaciones algebraicas, siendo esta estrategia una extensión del método IDA-PBC mostrado en (Ortega and García-Canseco, 2004). Se presenta en detalle el diseño del controlador junto con su análisis de estabilidad. De manera que la principal contribución en este trabajo es el diseño de un IDA-PBC para el control de orientación y profundidad deseadas y constantes de un vehículo submarino subactuado.

El resto del trabajo está organizado como sigue: en el Epígrafe 2 se introduce el modelo dinámico de un vehículo submarino y se formula el problema de control, mientras el diseño de un IDA-PBC que resuelve el problema de regulación es mostrado en el Epígrafe 3. La aplicación de los resultados obtenidos sobre el modelo de un vehículo submarino específico y resultados de simulación para validar el desempeño del sistema de control propuesto son mostrados en el Epígrafe 4. Finalmente, en el Epígrafe 5 se presentan algunas conclusiones.

2. Modelo Dinámico de un Vehículo Submarino y Formulación del Problema

Un vehículo submarino posee seis grados de libertad: tres para su posición y tres para su orientación. En la Tabla 1 se presenta la nomenclatura de la Sociedad de Arquitectos Navales e Ingenieros de la Marina (Society of Naval Architects and Marine Engineers), la cual será empleada en este trabajo (SNAME, 1950).

Tabla 1: Nomenclatura de la SNAME empleada para el modelo dinámico.

Posición	Fuerza	Velocidad lineal
x	X	u
y	Y	v
z	Z	w
Ángulos	Momentos	Velocidad angular
ϕ	K	p
θ	M	q
ψ	N	r

En la figura 1 aparecen representados los dos sistemas coordenados de referencia asignados al sistema robótico: el sistema móvil, ubicado en el centro de gravedad (CG) del vehículo; y el sistema fijo o inercial.

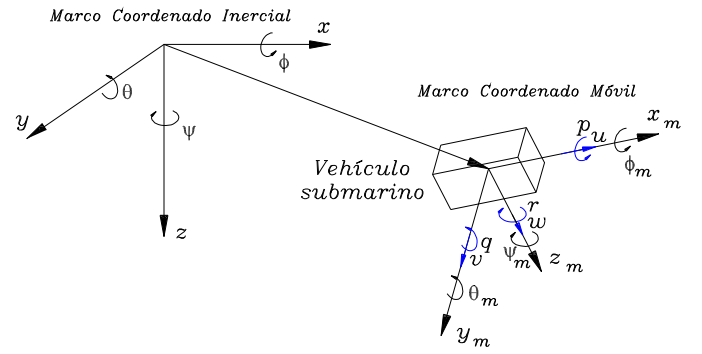


Figura 1: Marcos coordenados de referencia: sistema de referencia móvil y sistema de referencia fijo o inercial.

Los ángulos ϕ , θ y ψ representan los giros del vehículo submarino con respecto al marco coordenado inercial, y reciben los nombres de alabeo (pitch), cabeceo (roll) y guiñada (yaw), tal como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2: Giros espaciales.

Eje de pivotaje	Movimiento	Ángulo
x	Alabeo	ϕ
y	Cabeceo	θ
z	Guiñada	ψ

El modelo cinemático de postura de este sistema robótico es expresado mediante:

$$\dot{\eta} = J_T(\eta)v \quad (1)$$

donde $\eta = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$, $v = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$ y $J_T(\eta)$ es la matriz de transformación definida como:

$$J_T(\eta) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & 0 & 0 & 0 \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ 0 & 0 & 0 & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ 0 & 0 & 0 & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} J_{11} &= \cos(\psi)\cos(\theta), \\ J_{12} &= \cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta) - \cos(\phi)\sin(\psi), \\ J_{13} &= \sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta), \\ J_{21} &= \cos(\theta)\sin(\psi), \\ J_{22} &= \cos(\phi)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta), \\ J_{23} &= \cos(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta) - \cos(\psi)\sin(\phi), \\ J_{31} &= -\sin(\theta), \\ J_{32} &= \cos(\theta)\sin(\phi), \\ J_{33} &= \cos(\phi)\cos(\theta), \\ J_{44} &= 1, \\ J_{45} &= \sin(\phi)\tan(\theta), \\ J_{46} &= \cos(\phi)\tan(\theta), \\ J_{54} &= 0, \\ J_{55} &= \cos(\phi), \\ J_{56} &= -\sin(\phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{64} &= 0, \\ J_{65} &= \sin(\phi)/\cos(\theta), \\ J_{66} &= \cos(\phi)/\cos(\theta), \end{aligned}$$

donde $\theta \neq \frac{n_o\pi}{2}$ con n_o cualquier número impar diferente de cero.

Por otro lado, el modelo dinámico clásico usado ampliamente en la literatura de vehículos submarinos es el siguiente (Fossen, 2011)¹:

$$M\dot{\mathbf{v}} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + D(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = G\mathbf{u} \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J_T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \quad (4)$$

donde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $D(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de amortiguamiento hidrodinámico, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales y de flotación, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de distribución de las entradas de control sobre el vehículo y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector con las entradas de control. Note que el modelo dinámico clásico incluye el modelo cinemático de postura (1). Las matrices M y $C(\mathbf{v})$ se pueden descomponer de la siguiente manera:

$$M = M_V + M_{MA} \quad (5)$$

$$C(\mathbf{v}) = C_V(\mathbf{v}) + C_{IA}(\mathbf{v}) \quad (6)$$

donde M_V , $C_V(\mathbf{v})$ son las matrices cuyos componentes hacen referencia al vehículo y M_{MA} , $C_{IA}(\mathbf{v})$ son las matrices que consideran los efectos hidrodinámicos derivados de la masa e inercia agregada.

2.1. Análisis del sistema en malla abierta

Despéjese el modelo dinámico (3) y (4) de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J_T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}, \quad (7)$$

$$M\dot{\mathbf{v}} = -C(\mathbf{v})\mathbf{v} - D(\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + G\mathbf{u}. \quad (8)$$

Enseguida, (7) y (8) pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ M\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\boldsymbol{\eta}) \\ -I_{n \times n} & -C(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (9)$$

siendo $I_{n \times n}$ la matriz identidad de dimensión $n \times n$, y $0_{n \times n}$ y $0_{n \times m}$ las matrices nulas con sus dimensiones indicadas en sus subíndices. Ahora, con el fin de reescribir (9) en la notación que utiliza el método IDA-PBC, se hace un cambio de variables como sigue: $[\mathbf{q}_\eta^T \ \mathbf{p}_v^T]^T = [\boldsymbol{\eta}^T \ M\mathbf{v}^T]^T$, cuya derivada temporal, después de tomar en cuenta que la matriz M es constante, queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\eta \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ M\dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Tomando en cuenta (10) el sistema en malla abierta (9) puede ser reescrito como sigue:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\eta \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\mathbf{q}_\eta) \\ -I_{n \times n} & -Q(M^{-1}\mathbf{p}_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}_\eta) \\ M^{-1}\mathbf{p}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (11)$$

donde la matriz $Q(M^{-1}\mathbf{p}_v) = C(M^{-1}\mathbf{p}_v) + D(M^{-1}\mathbf{p}_v)$. En general, la dinámica del sistema en malla abierta que utiliza el método IDA-PBC tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\mathbf{x}} = [F_{IDA}(\mathbf{x}) - D_{IDA}(\mathbf{x})] \nabla_{\mathbf{x}} H_{IDA}(\mathbf{x}) + B\mathbf{u} \quad (12)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ es el vector de estado, $F_{IDA}(\mathbf{x}) = -F_{IDA}^T(\mathbf{x})$ es la matriz de interconexión del sistema, $D_{IDA}(\mathbf{x}) = D_{IDA}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ representa el amortiguamiento, $H_{IDA}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ representa la función de energía total del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control y la matriz $B = [0_{n \times m}^T \ G^T]^T \in \mathbb{R}^{2n \times m}$. De acuerdo a esto, y con el fin de representar en modelo dinámico en la nomenclatura que emplea el método IDA-PBC, (10) puede ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) + B\mathbf{u} \quad (13)$$

donde $\mathbf{x} = [\mathbf{q}_\eta^T \ \mathbf{p}_v^T]^T$ y $F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\mathbf{q}_\eta) \\ -I_{n \times n} & -Q(M^{-1}\mathbf{p}_v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Esto es,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\eta \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\mathbf{q}_\eta) \\ -I_{n \times n} & -Q(M^{-1}\mathbf{p}_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_\eta} H(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{p}_v} H(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (14)$$

donde se han sustituido los términos $\mathbf{g}(\mathbf{q}_\eta)$ y $M^{-1}\mathbf{p}_v$ de (11) por los vectores $\nabla_{\mathbf{q}_\eta} H(\mathbf{x})$ y $\nabla_{\mathbf{p}_v} H(\mathbf{x})$ respectivamente, con el fin de utilizar la notación que maneja el método IDA-PBC.

Considerando que respecto al plano $x - y$ la distancia entre el centro de gravedad y el centro de flotación es nula, es decir, que solamente existe una distancia vertical k_z entre ellas a lo largo del eje z , lo que confiere al vehículo un par restaurador, y tomando en cuenta que el peso del vehículo, representado por W es igual al empuje, el vector de pares gravitacionales y de flotación resulta (Fossen (2011)):

$$\nabla_{\mathbf{q}_\eta} H(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}_\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_z W \cos(\theta) \sin(\phi) \\ k_z W \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

tal que el vector $\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x})$ completo en (14) queda como:

$$\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_\eta} H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \\ \nabla_{\mathbf{p}_v} H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_z W \cos(\theta) \sin(\phi) \\ k_z W \sin(\theta) \\ 0 \\ u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (16)$$

¹Note la diferencia del escalar u –definido en la Tabla 1 como la velocidad lineal a lo largo del eje x – con el vector \mathbf{u} en (3), definido como el vector de las entradas de control.

2.2. Sistema en malla cerrada: dinámica deseada

Siguiendo el procedimiento de diseño del método IDA-PBC, se considera la siguiente dinámica deseada en malla cerrada:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = F_d(\tilde{\mathbf{x}})\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}H_d(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (17)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ con $\mathbf{x}^* = [\mathbf{q}_\eta^{*T} \mathbf{p}_v^{*T}]^T$; siendo \mathbf{q}_η^* el vector que contiene la profundidad y orientación deseadas, mismas que son constantes, y \mathbf{p}_v^* es un vector con elementos nulos. $F_d(\tilde{\mathbf{x}}) = -F_d^T(\tilde{\mathbf{x}})$ es una matriz deseada de dimensión $2n \times 2n$ y $\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}H_d(\tilde{\mathbf{x}})$ es un vector que será usado junto con $F_d(\tilde{\mathbf{x}})$ para construir la ley de control \mathbf{u} . La dinámica deseada (17) también puede expresarse como sigue:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_\eta \\ \tilde{\mathbf{p}}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\tilde{\mathbf{q}}_\eta) \\ -J_T(\tilde{\mathbf{q}}_\eta)^T & -Q_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\tilde{\mathbf{q}}_\eta} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \\ \nabla_{\tilde{\mathbf{p}}_v} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde la matriz $Q_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) = J_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) + R_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v)$ con $J_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) = -J_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v)^T$ y $R_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) = R_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v)^T \geq 0$, que junto con $\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}H_d(\tilde{\mathbf{x}})$ son parámetros de diseño. Tomando en cuenta que \mathbf{q}_η^* y \mathbf{p}_v^* son constantes, se puede verificar la siguiente equivalencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_\eta \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_\eta \\ \dot{\mathbf{p}}_v \end{bmatrix} \quad (19)$$

y por tanto (18) puede reescribirse como sigue:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\eta \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\tilde{\mathbf{q}}_\eta) \\ -J_T(\tilde{\mathbf{q}}_\eta)^T & -Q_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\tilde{\mathbf{q}}_\eta} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \\ \nabla_{\tilde{\mathbf{p}}_v} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Las ecuaciones (14) y (20) representan la dinámica del sistema en malla abierta y en malla cerrada, respectivamente.

2.3. Problema de control

El problema de control es diseñar una ley de control \mathbf{u} tal que al sustituirla en (14) se obtenga la dinámica deseada (20), de manera que se tenga la garantía de que el vehículo se desplace hacia una profundidad y orientación deseadas y constantes. Por tanto, formalmente el objetivo de control es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} z(t) - z_d \\ \phi(t) - \phi_d \\ \theta(t) - \theta_d \\ \psi(t) - \psi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde z_d, ϕ_d, θ_d y ψ_d representan la profundidad y orientación deseadas y constantes.

3. Un Controlador IDA-PBC

Para iniciar el diseño de la ley de control, considérese $F(\mathbf{x})$ y $F_d(\tilde{\mathbf{x}})$ de (13) y (17), respectivamente, esto es:

$$F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\mathbf{q}_\eta) \\ -I_{n \times n} & -Q(M^{-1}\mathbf{p}_v) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & J_T(\tilde{\mathbf{q}}_\eta) \\ -J_T(\tilde{\mathbf{q}}_\eta)^T & -Q_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

donde $Q_d(M^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_v) = J_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) + R_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v)$. En general

$$J_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) = \begin{bmatrix} 0 & -f_{d12} & -f_{d13} & -f_{d14} & -f_{d15} & -f_{d16} \\ f_{d12} & 0 & -f_{d23} & -f_{d24} & -f_{d25} & -f_{d26} \\ f_{d13} & f_{d23} & 0 & -f_{d34} & -f_{d35} & -f_{d36} \\ f_{d14} & f_{d24} & f_{d34} & 0 & -f_{d45} & -f_{d46} \\ f_{d15} & f_{d25} & f_{d35} & f_{d45} & 0 & -f_{d56} \\ f_{d16} & f_{d26} & f_{d36} & f_{d46} & f_{d56} & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

y

$$R_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) = \begin{bmatrix} r_{d11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{d22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{d33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{d44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{d55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{d66} \end{bmatrix} \quad (25)$$

con los términos f_{dij} y r_{dii} funciones de $\tilde{\mathbf{q}}_\eta$ y $\tilde{\mathbf{p}}_v$. Basado en la definición de $R_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \geq 0$, se tiene que $r_{dii} \geq 0$.

3.1. Ley de control

Al sustituir (22) y (23) en (14) y (20) respectivamente, e igualándose ambas ecuaciones se obtiene:

$$F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_\eta} H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \\ \nabla_{\mathbf{p}_v} H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} = F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \begin{bmatrix} \nabla_{\tilde{\mathbf{q}}_\eta} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \\ \nabla_{\tilde{\mathbf{p}}_v} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

De manera que despejando el término $\begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u}$ de (26) resulta

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} = F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) - F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \nabla_x H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v). \quad (27)$$

Dado que la matriz G no es de rango pleno, se define la matriz $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{G} = I_{2n \times 2n} - \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix}^T. \quad (28)$$

Multiplicando la matriz \mathcal{G} por la izquierda en ambos lados de la igualdad de (27), queda:

$$\mathcal{G} \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathcal{G} \left[F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) - F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \nabla_x H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \right] \quad (29)$$

donde $\mathcal{G} \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}_{2n}$, por lo que al sustituirse en (29) se obtiene:

$$\mathbf{0}_{2n} = \mathcal{G} \left[F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) - F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \nabla_x H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \right], \quad (30)$$

o bien

$$\mathcal{G} \left[F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \right] = \mathcal{G} \left[F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \nabla_x H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \right] \quad (31)$$

la cual representa un conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones de igualación o *matching equations* (Ortega and García-Canese, 2004). Entonces, de (27) la ley de control puede obtenerse como sigue

$$\mathbf{u} = \left[\begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G \end{bmatrix}^T \left[F_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} H_d(\tilde{\mathbf{q}}_\eta, \tilde{\mathbf{p}}_v) - F(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \nabla_x H(\mathbf{q}_\eta, \mathbf{p}_v) \right] \quad (32)$$

con $F_d(\tilde{q}_\eta, \tilde{p}_v)$ y $\nabla_{\tilde{x}} H_d(\tilde{q}_\eta, \tilde{p}_v)$ soluciones de (31) que cumplen con (26); lo que equivale a decir que (32) transforma (14) en la dinámica deseada (20). Finalmente, para resolver el problema de control se presenta la siguiente Proposición:

Proposición 1. Considere un vehículo submarino de cuatro propelas y seis grados de libertad (esto es, $n = 6$ y $m = 4$) con tres planos de simetría con respecto al sistema de referencia móvil ubicado en su centro de gravedad (figura 2).

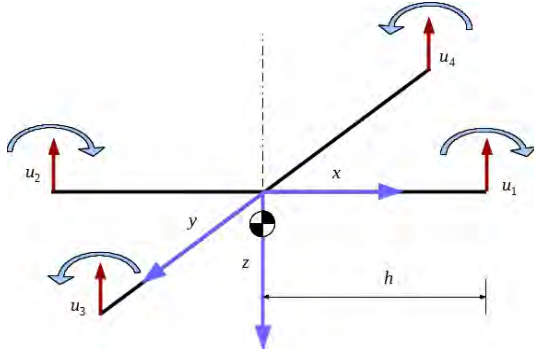


Figura 2: Esquema del vehículo submarino

Defínanse las matrices M_V y M_{MA} introducidas en (5) para el vehículo mostrado en la figura 2, como sigue:

$$M_V = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$M_{MA} = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\dot{w}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix},$$

tal que M es una matriz diagonal; así como las matrices $C_V(v)$ y $C_{IA}(v)$ mostradas en (6) y definidas de la siguiente manera:

$$C_V(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & mw & -mv & 0 & I_{zz}r & -I_{yy}q \\ -mw & 0 & mu & -I_{zz}r & 0 & I_{xx}p \\ mv & -mu & 0 & I_{yy}q & -I_{xx}p & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{IA}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v & 0 & -N_{\dot{r}}r & M_{\dot{q}}q \\ Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u & N_{\dot{r}}r & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & -M_{\dot{q}}q & K_{\dot{p}}p & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

donde m es la masa del vehículo; $X_{\dot{u}}$, $Y_{\dot{v}}$, $Z_{\dot{w}}$, $K_{\dot{p}}$, $M_{\dot{q}}$ y $N_{\dot{r}}$ los términos constantes asociados a la masa agregada; I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} los elementos de la diagonal del tensor de inercia. Finalmente,

la matriz $D(v)$ de (3) corresponde a:

$$D(v) = - \begin{bmatrix} d_{11}|u| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}|v| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}|w| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44}|p| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55}|q| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66}|r| \end{bmatrix}, \quad (35)$$

siendo d_{ii} constantes estrictamente negativas. De manera que el sistema en malla abierta (14) posee la siguiente matriz G :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -h & h \\ h & -h & 0 & 0 \\ T_q & T_q & -T_q & -T_q \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde h es la distancia de la propela al eje por el que pasa el centro de gravedad y T_q es una constante estrictamente positiva que permite relacionar la diferencia de pares en las propelas con el par alrededor del eje z . Los términos u_i mostrados en la figura 2 son las entradas de control que accionan cada una de las propelas.

Los parámetros del vehículo referentes a $Q(M^{-1}p_v)$ representados en (14) corresponden a:

$$Q(M^{-1}p_v) = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & -Q_{15} & -Q_{16} \\ 0 & Q_{22} & 0 & -Q_{24} & 0 & -Q_{26} \\ 0 & 0 & Q_{33} & -Q_{34} & -Q_{35} & 0 \\ 0 & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & -Q_{45} & -Q_{46} \\ Q_{15} & 0 & Q_{35} & Q_{45} & Q_{55} & -Q_{56} \\ Q_{16} & Q_{26} & 0 & Q_{46} & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (37)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -d_{11}|u|, \\ Q_{15} &= [Z_{\dot{w}} - m]w, \\ Q_{16} &= [m - Y_{\dot{v}}]v, \\ Q_{22} &= -d_{22}|v|, \\ Q_{24} &= [m - Z_{\dot{w}}]w, \\ Q_{26} &= [X_{\dot{u}} - m]u, \\ Q_{33} &= -d_{33}|w|, \\ Q_{34} &= [Y_{\dot{v}} - m]v, \\ Q_{35} &= [m - X_{\dot{u}}]u, \\ Q_{44} &= -d_{44}|p|, \\ Q_{45} &= [N_{\dot{r}} - I_{zz}]r, \\ Q_{46} &= [I_{yy} - M_{\dot{q}}]q, \\ Q_{55} &= -d_{55}|q|, \\ Q_{56} &= [K_{\dot{p}} - I_{xx}]p, \\ Q_{66} &= -d_{66}|r|. \end{aligned} \quad (38)$$

Sea la ley de control (32) considerando (24) y (25) con:

$$\begin{aligned}
 r_{d11} &= -d_{11} |u|, \\
 r_{d22} &= -d_{22} |v|, \\
 f_{d12} &= 0, \\
 f_{d13} &= 0, \\
 f_{d14} &= 0, \\
 f_{d15} &= [Z_{\dot{w}} - m]w, \\
 f_{d16} &= [m - Y_{\dot{v}}]v, \\
 f_{d23} &= 0, \\
 f_{d24} &= [m - Z_{\dot{w}}]w, \\
 f_{d25} &= 0, \\
 f_{d26} &= [X_{\dot{u}} - m]u,
 \end{aligned} \quad (39)$$

donde $r_{d_{aa}} = k$ (una constante positiva arbitraria) y $f_{d_{ab}} = 0$, siendo $a \neq b$ con $a, b = 3, \dots, 6$. Ahora, sea el vector $\nabla_{\tilde{x}} H_d(\tilde{q}_\eta, \tilde{p}_v)$ dado por

$$\nabla_{\tilde{x}} H_d(\tilde{q}_\eta, \tilde{p}_v) = \begin{bmatrix} [z - z_d] [\cos(\psi)\tan(\theta) + \sin(\psi)\tan(\phi)/\cos(\theta)] \\ [z - z_d] [\sin(\psi)\tan(\theta) - \cos(\psi)\tan(\phi)/\cos(\theta)] \\ z - z_d \\ \phi - \phi_d \\ \theta - \theta_d \\ \psi - \psi_d \\ u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (40)$$

donde $\phi \neq \frac{n\pi}{2}$, con n_o cualquier número impar diferente de cero, $-\pi/2 < \theta_d < \pi/2$ y $-\pi/2 < \phi_d < \pi/2$. Entonces la ley de control (32) transforma la dinámica en malla abierta (14) en la dinámica en malla cerrada (20).

□□

Prueba: El vector $\nabla_{\tilde{x}} H_d(\tilde{q}_\eta, \tilde{p}_v)$ dado en (40) es obtenido a partir de la siguiente propuesta:

$$\nabla_{\tilde{x}} H_d(\tilde{q}_\eta, \tilde{p}_v) = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ z - z_d \\ \phi - \phi_d \\ \theta - \theta_d \\ \psi - \psi_d \\ u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (41)$$

donde P_1 y P_2 son términos libres asociados a las variables de estado x e y , respectivamente. Puede observarse que los seis últimos términos de (41) coinciden con los correspondientes de (16). Al incorporar (39) y (41) en (30), esta última ecuación

resulta:

$$\mathbf{0}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ EC_7 \\ EC_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

donde

$$EC_7 = [z - z_d] \sin(\theta) - \cos(\theta) [P_1 \cos(\psi) + P_2 \sin(\psi)],$$

$$EC_8 = -[z - z_d] \cos(\theta) \sin(\phi) + \cos(\theta) [P_1 \sin(\psi) - P_2 \cos(\psi)] - \sin(\theta) \sin(\phi) [P_1 \cos(\psi) + P_2 \sin(\psi)]. \quad (43)$$

De esta manera se requiere que $EC_7 = 0$ y $EC_8 = 0$. Por tanto,

$$P_1 = [z - z_d] [\cos(\psi) \tan(\theta) + \sin(\psi) \tan(\phi)/\cos(\theta)], \quad (44)$$

$$P_2 = [z - z_d] [\sin(\psi) \tan(\theta) - \cos(\psi) \tan(\phi)/\cos(\theta)]. \quad (45)$$

De manera que sustituyendo (44) y (45) en (41) se completa la ley de control (32) como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (46)$$

donde los términos α_i están dados por:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} [kw + [m - X_{\dot{u}}]qu + [Y_{\dot{v}} - m]pv + d_{33}w|w| + [z - z_d]/[\cos(\theta)\cos(\phi)]],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2h} [[I_{xx} - I_{zz}]pr + [N_{\dot{r}} - K_{\dot{p}}]pr + [m - X_{\dot{u}}]uw - kq - d_{55}q|q| - [\theta - \theta_d] \cos(\phi) + k_z W \sin(\theta) - [\psi - \psi_d] \sin(\phi)/\cos(\theta) - [\phi - \phi_d] \sin(\phi) \tan(\theta)],$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4T_q} [[I_{yy} - I_{xx}]pq + [K_{\dot{p}} - M_{\dot{q}}]pq - kr - d_{66}r|r| - [\psi - \psi_d] \cos(\phi)/\cos(\theta) - [\phi - \phi_d] \cos(\phi) \tan(\theta) + [\theta - \theta_d] \sin(\phi)],$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2h} [-kp + [I_{zz} - I_{yy}]qr + [M_{\dot{q}} - N_{\dot{r}}]qr - d_{44}p|p| + [Y_{\dot{v}} - m]vw - [\phi - \phi_d] + k_z W \cos(\theta) \sin(\phi)],$$

para transformar la dinámica en malla abierta (14) en la dinámica en malla cerrada (20).

3.2. Análisis de estabilidad

Sólo resta demostrar el cumplimiento del objetivo de control (21). Con este fin se realiza el análisis de estabilidad del equilibrio del sistema en malla cerrada (20) basado en el método indirecto de Lyapunov y el teorema de la variedad central

(Khalil, 2002). Por tanto, (20) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{\eta_1} &= u \cos(\theta) \cos(\psi) + v [\cos(\psi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) - \cos(\phi) \text{sen}(\psi)] \\
 &\quad + w [\cos(\phi) \cos(\psi) \text{sen}(\theta) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi)], \\
 \dot{q}_{\eta_2} &= u \cos(\theta) \text{sen}(\psi) + v [\cos(\phi) \cos(\psi) + \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi)] \\
 &\quad + w [\cos(\phi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) - \cos(\psi) \text{sen}(\phi)], \\
 \dot{q}_{\eta_3} &= -u \text{sen}(\theta) + v \cos(\theta) \text{sen}(\phi) + w \cos(\theta) \cos(\phi), \\
 \dot{q}_{\eta_4} &= p + q \text{sen}(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta), \\
 \dot{q}_{\eta_5} &= q \cos(\phi) - r \text{sen}(\phi), \\
 \dot{q}_{\eta_6} &= [r \cos(\phi) + q \text{sen}(\phi)] / \cos(\theta), \\
 \dot{p}_{v_1} &= [Z_{\dot{w}} - m] w q + [m - Y_{\dot{v}}] v r + d_{11} u |u|, \\
 \dot{p}_{v_2} &= [m - Z_{\dot{w}}] w p + [X_{\dot{u}} - m] u r + d_{22} v |v|, \\
 \dot{p}_{v_3} &= -k w - [z - z_d] / [\cos(\theta) \cos(\phi)], \\
 \dot{p}_{v_4} &= -k p + [Z_{\dot{w}} - m] v w - [\phi - \phi_d], \\
 \dot{p}_{v_5} &= -k q + [m - Z_{\dot{w}}] u w - [\theta - \theta_d] \cos(\phi) \\
 &\quad - [\psi - \psi_d] \text{sen}(\phi) / \cos(\theta) - [\phi - \phi_d] \text{sen}(\phi) \tan(\theta), \\
 \dot{p}_{v_6} &= -k r + [Y_{\dot{v}} - X_{\dot{u}}] u v - [\psi - \psi_d] \cos(\phi) / \cos(\theta) \\
 &\quad + [\theta - \theta_d] \text{sen}(\phi) - [\phi - \phi_d] \cos(\phi) \tan(\theta).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Enseguida se determina el conjunto de puntos de equilibrio de (47) al igualar $\dot{q}_{\eta_i} = 0$ y $\dot{p}_{v_i} = 0$ con $i = 1, \dots, 6$, donde resulta un continuo de equilibrios, esto es,

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} q_{\eta} \\ p_v \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n} : x, y \in \mathbb{R}, z = z_d, \phi = \phi_d, \theta = \theta_d, \psi = \psi_d, \right. \\
 \left. u = v = w = p = q = r = 0 \right\}. \tag{48}$$

Expresándose (47) en la forma $\dot{x} = f(x)$ puede verificarse que $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable, donde \mathcal{D} es un dominio que contiene al continuo de equilibrios (48). Nótese que $q_{\eta_1} = x$ y $q_{\eta_2} = y$ no intervienen directamente en (47), por lo que las primeras dos ecuaciones de (47) pueden separarse del resto. Ahora, de acuerdo al teorema de la variedad central (Khalil (2002), pp. 303-312), conviene hacer las siguientes definiciones:

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix},$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \\ \beta_{25} \\ \beta_{26} \\ \beta_{27} \\ \beta_{28} \end{bmatrix},$$

tal que no se han tomado en cuenta las variables de estado x e y . De esta manera el sistema (47), sin tomar en cuenta las primeras

dos ecuaciones, linealizado en el equilibrio

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_d \\ \phi_d \\ \theta_d \\ \psi_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

posee los siguientes valores propios:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0, \\
 \lambda_2 &= 0, \\
 \lambda_3 &= \frac{1}{2}[-k - \sqrt{-4 + k^2}], \\
 \lambda_4 &= \frac{1}{2}[-k - \sqrt{-4 + k^2}], \\
 \lambda_5 &= \frac{1}{2}[-k + \sqrt{-4 + k^2}], \\
 \lambda_6 &= \frac{1}{2}[-k + \sqrt{-4 + k^2}], \\
 \lambda_7 &= \frac{1}{2} \left[-k + \sqrt{k^2 - \frac{4}{1 - \text{sen}(\theta_d)}} \right], \\
 \lambda_8 &= \frac{1}{2} \left[-k - \sqrt{k^2 - \frac{4}{1 - \text{sen}(\theta_d)}} \right], \\
 \lambda_9 &= \frac{1}{2} \left[-k + \sqrt{k^2 - \frac{4}{1 + \text{sen}(\theta_d)}} \right], \\
 \lambda_{10} &= \frac{1}{2} \left[-k - \sqrt{k^2 - \frac{4}{1 + \text{sen}(\theta_d)}} \right],
 \end{aligned} \tag{50}$$

donde la parte real de λ_i es negativa con $k > 0$, $-\pi/2 < \theta_d < \pi/2$ y $-\pi/2 < \phi_d < \pi/2$, para $i = 3, 4, \dots, 10$. Los valores propios λ_1 y λ_2 son nulos por lo que, de acuerdo al teorema de la variedad central, las ecuaciones \dot{p}_{v_1} y \dot{p}_{v_2} de (47) correspondientes a β_1 son el sistema reducido que también puede ser expresado mediante

$$\dot{\beta}_{11} = [Z_{\dot{w}} - m] \beta_{25} \beta_{27} + [m - Y_{\dot{v}}] \beta_{12} \beta_{28} + d_{11} \beta_{11} |\beta_{11}|, \tag{51}$$

$$\dot{\beta}_{12} = [m - Z_{\dot{w}}] \beta_{25} \beta_{26} + [X_{\dot{u}} - m] \beta_{11} \beta_{28} + d_{22} \beta_{12} |\beta_{12}|. \tag{52}$$

Ahora, continuando con el teorema de la variedad central, considérese que $\beta_2 = h(\beta_1)$, con $h(\beta_1)$ una función continuamente diferenciable. Por lo que analizando su primera aproximación, esto es $h(\beta_1) \approx \mathbf{0}_8$, tenemos que (51)-(52) resulta

$$\dot{\beta}_{11} = d_{11} \beta_{11} |\beta_{11}| + \mathcal{O}_1(\|\beta_1\|_2^3) \tag{53}$$

$$\dot{\beta}_{12} = d_{22} \beta_{12} |\beta_{12}| + \mathcal{O}_2(\|\beta_1\|_2^3) \tag{54}$$

donde el significado de $\mathcal{O}_i(\|\beta_1\|_2^3)$ se refiere a lo siguiente: si una función $f(\mu) = \mathcal{O}(\|\mu\|^p)$ ($p > 1$) entonces $\|f(\mu)\| \leq k_{\mu} \|\mu\|^p$ (para $k_{\mu} > 0$ y $\|\mu\|$ suficientemente pequeña). De esta manera, los términos dominantes $d_{11} \beta_{11} |\beta_{11}|$ y $d_{22} \beta_{12} |\beta_{12}|$, respectivamente para (53) y (54), simplifican las ecuaciones a:

$$\dot{\beta}_{11} = d_{11} \beta_{11} |\beta_{11}|, \tag{55}$$

$$\dot{\beta}_{12} = d_{22} \beta_{12} |\beta_{12}|. \tag{56}$$

De (55)-(56), resta probar que su origen $[\beta_{11} \ \beta_{12}]^T = [0 \ 0]^T$ es un equilibrio asintóticamente estable. Con este fin, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\beta_{11}, \beta_{12}) = \frac{1}{2} [\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2].$$

Y en virtud de que su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (55) y (56) es:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\beta_{11}, \beta_{12}) &= \beta_{11}\dot{\beta}_{11} + \beta_{12}\dot{\beta}_{12} \\ &= d_{11}\beta_{11}^2|\beta_{11}| + d_{22}\beta_{12}^2|\beta_{12}| < 0, \quad \forall \beta_{11}, \beta_{12} \neq 0\end{aligned}$$

donde $d_{11} < 0$ y $d_{22} < 0$ de (35), se demuestra que el origen del sistema reducido (55)-(56) es asintóticamente estable. Este resultado junto con el conocimiento que $Re\{\lambda_i\} < 0$ para $i = 3, 4, \dots, 10, k > 0, -\pi/2 < \theta_d < \pi/2$ y $-\pi/2 < \phi_d < \pi/2$ demuestra que el equilibrio (49) es asintóticamente estable en forma local. De manera que el objetivo de control (21) es satisfecho. Finalmente, cabe destacar que de las primeras dos ecuaciones de (47) se puede verificar que las trayectorias $x(t)$ e $y(t)$ convergen a un valor constante. $\square \square$

4. Aplicación a un Vehículo Submarino

En la figura 2 se muestra un diagrama esquemático de un vehículo submarino utilizado para validar la estrategia de control con resultados en forma numérica. El vehículo propuesto tiene cuatro propelas que se encuentran perpendiculares al plano horizontal y paralelas entre ellas, lo cual fue considerado en la Proposición 1.

Los valores numéricos del vehículo propuesto son los siguientes:

$$\begin{aligned}m &= 21,528 \text{ (kg)}, \\ I_{xx} &= 0,386 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ I_{yy} &= 0,386 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ I_{zz} &= 0,471 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ X_{\dot{u}} &= -0,3746 \text{ (kg)}, \\ Y_{\dot{v}} &= -0,3746 \text{ (kg)}, \\ Z_{\dot{w}} &= -0,6545 \text{ (kg)}, \\ K_{\dot{p}} &= -0,004306 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ M_{\dot{q}} &= -0,004306 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ N_{\dot{r}} &= -0,006458 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ d_{11} &= -47,888 \text{ (kg/m)}, \\ d_{22} &= -47,888 \text{ (kg/m)}, \\ d_{33} &= -49,645 \text{ (kg/m)}, \\ d_{44} &= -0,188 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ d_{55} &= -0,188 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ d_{66} &= -0,695 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, \\ W &= 211,195 \text{ (N)}, \\ k_z &= 0,001 \text{ (m)}, \\ h &= 0,36 \text{ (m)}, \\ T_q &= 0,3 \text{ (m)}.\end{aligned}$$

4.1. Simulaciones

Los resultados de simulación obtenidas para el modelo propuesto son mostrados en este Epígrafe. Se utilizó el software Scilab-Xcos con el método numérico Sundials/CVODE - BDF - NEWTON, con un tiempo de simulación de 400 (s) y una tolerancia del integrador de 1×10^{-3} . Las condiciones iniciales se consideraron nulas para todos los estados y los valores deseados fueron: $z_d = 10$ (m), $\phi_d = -0,5$ (rad), $\theta = 0,5$ (rad) y $\psi_d = 1$ (rad), respectivamente. Las ganancias del controlador (32) fueron: $r_{d33} = 50$ (kg/s), $r_{d44} = r_{d55} = r_{d66} = 50$ (kg \cdot m²/s), tal que $k = 50$.

En las gráficas mostradas en las figuras 5-4, se observa el cumplimiento del objetivo de control, donde las trayectorias de profundidad y orientación se desvanecen hacia los valores deseados, esto es, en términos del error cada una de ellas tiende a cero, mientras es de notarse que las trayectorias $x(t)$ e $y(t)$ convergen a un valor constante (figura 5). En la figura 6 se muestran las acciones de control para cada uno de los propulsores, mientras el desplazamiento en 3D del vehículo con respecto al marco fijo es mostrado en la figura 7.

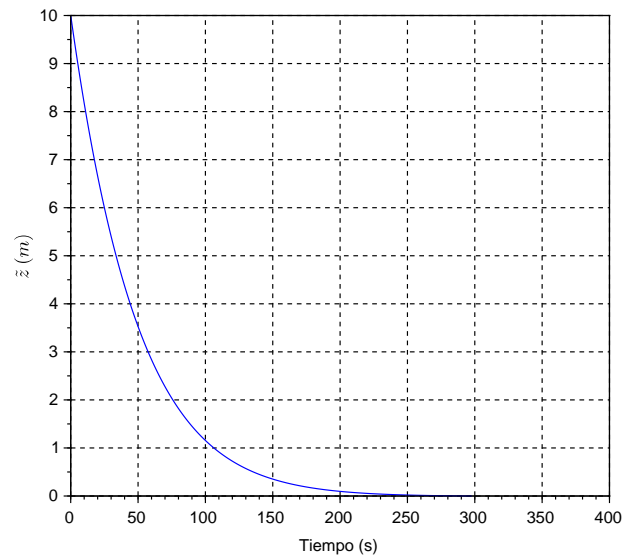


Figura 3: Evolución temporal del error de profundidad $\tilde{z}(t)$.

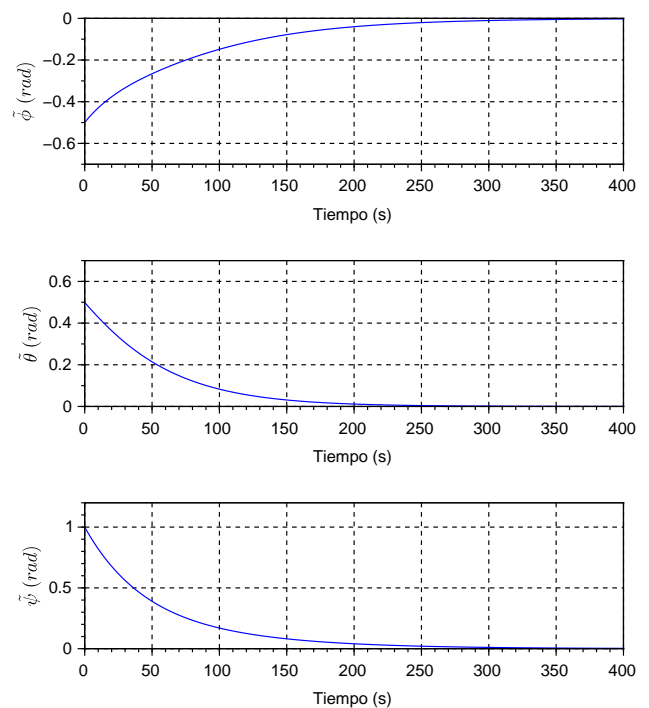


Figura 4: Evolución temporal de los errores de los ángulos de giro: $\tilde{\phi}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$.

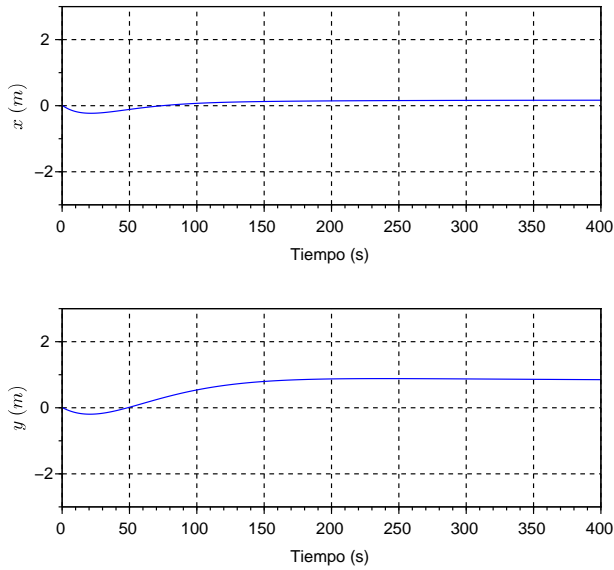


Figura 5: Evolución temporal de $x(t)$ e $y(t)$.

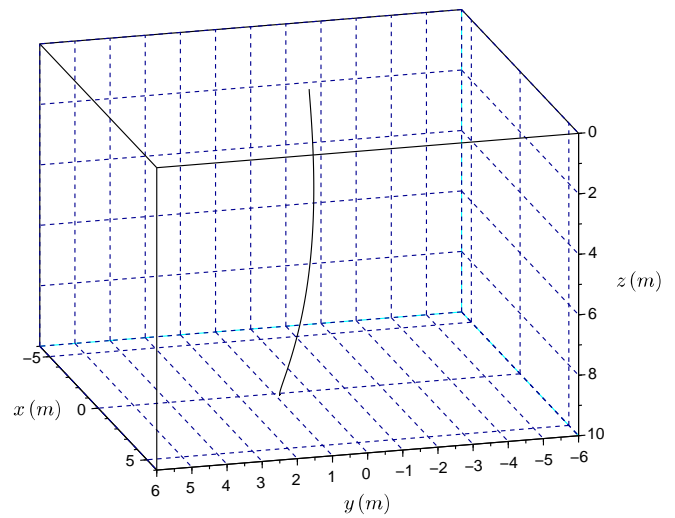


Figura 7: Desplazamiento en 3D del vehículo.

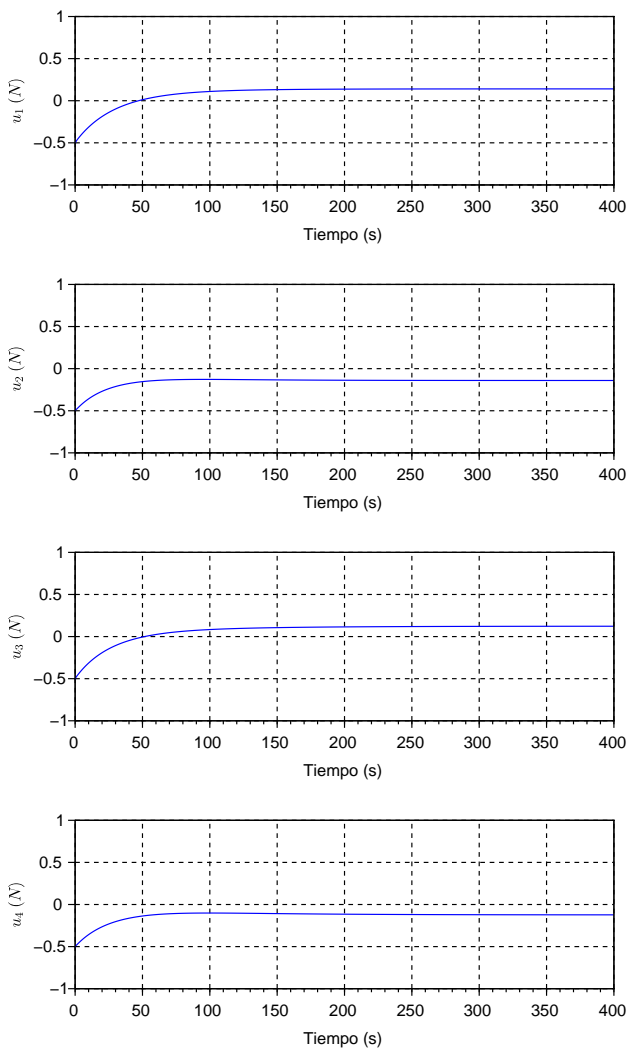


Figura 6: Acciones de control.

5. Conclusiones

Se ha presentado un IDA-PBC para el control de un vehículo submarino subactuado que permite llevarlo a una profundidad y orientación deseadas y constantes. Resultados de simulación validan el desempeño del sistema de control propuesto. Como trabajo a futuro se pretende el análisis de estabilidad del sistema en malla cerrada usando herramientas de control no lineal que permitan encontrar un estimado del dominio de atracción, así como el desarrollo de una extensión del método IDA-PBC para seguimiento de trayectorias con perturbaciones aplicado a vehículos submarinos.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Tecnológico Nacional de México (Contratos TecNM 5939.16-P-C-P y 6104.17-P), y por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Contrato CONACyT 166636).

Referencias

Acosta, V., Ríos-Bolívar, M., 2010. Aplicación del enfoque ida-*pb*c en la estabilización del sistema pendubot. *Revista Ciencia e Ingeniería* 31 (1), 3–12.

Akçakaya, H., Sumer, L., 2013. *Ida-pbc* design for marine vehicle. 1st IFAC Workshop on Advances in Control and Automation Theory for Transportation Applications, Istanbul, Turkey, 150–155.

Balebona, C., Jenry, J., 2009. Diseño de controladores de energía (hamiltonianos) para sistemas no lineales con un grado de subactuación: un enfoque *ida-pbc*. Tesis de Posgrado, Universidad de Oriente, Barcelona, España.

Bloch, A. M., Chang, D. E., Leonard, N. E., Marsden, J. E., 2001. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems ii: Potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (10), 1556–1571.

Borja, P., Espinosa, G., 2013. Seguimiento de trayectorias para sistemas mecánicos subactuados vía *ida-pbc*. Congreso Nacional de Control Automático, Ensenada, Baja California, México.

Cornejo, C., 2010. Sistemas dinámicos con fricción expresada en ecuaciones hamiltonianas controladas por puerto. Tesis de doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

de la Cruz, J. M., Almansa, J. A., Sierra, J. M., 2012. Automática marina: Una revisión desde el punto de vista del control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 29 (3), 205–218.

- Donaire, A., Pérez, T., 2010. Port-hamiltonian theory of motion control for marine craft. In Proceedings of the 8th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems. Rostock, Alemania, 201–206.
- Donaire, A., Pérez, T., 2012. Dynamic positioning of marine craft using port-hamiltonian framework. *Automatica* 48, 851–856.
- Eski, I., Yildirim, S., 2014. Design of neural network control system for controlling trajectory of autonomous underwater vehicles. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 11, 1–17.
- Fossen, T., 2011. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. John Wiley.
- Gómez-Estern, F., 2002. Control de sistemas no lineales basados en la estructura hamiltoniana. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- Gómez-Estern, F., Ortega, R., Rubio, F. R., Aracil, J., 2001. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via total energy shaping. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control* 2, 1137–1143.
- González, J., Gomáriz, S., Batlle, C., 2015. Control difuso para el seguimiento de guiñada del *auv* cormorán. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 12, 166–176.
- Healey, A. J., Lienard, D., 1993. Multivariable sliding mode control for autonomous diving and steering of unmanned underwater vehicles. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 18, 327–339.
- Khalil, H., 2002. *Nonlinear systems*. Prentice Hall.
- Kotyczka, P., Lohmann, B., 2009. Parametrization of ida-pbc by assignment of local linear dynamics. *Proceedings of the European Control Conference, Budapest, Hungary*, 4721–4726.
- Moreno, H., Saltarén, R., Puglisi, I., Carrera, L., Cárdenas, P., Álvarez, C., 2014. Robótica submarina: Conceptos, elementos, modelado y control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 11, 3–19.
- Morillo, A., Arteaga, F., 2007. Estabilización del sistema acrobot usando el enfoque ida-pbc. *Revista Ingeniería UC* 14 (3), 30–40.
- Ortega, R., García-Canseco, E., 2004. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control* 10 (5), 432–450.
- Ortega, R., Spong, M. W., Gómez-Estern, F., Blankenstein, G., 2002. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (8), 1218–1233.
- Ortega, R., van der Schaft, A., Castanos, F., Astolfi, A., 2008. Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 53, 2527–2542.
- Pérez, T., Donaire, A., Renton, C., Valentinis, F., 2013. Energy-based motion control of marine vehicles using interconnection and damping assignment passivity-based control - a survey. 9th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Osaka, Japan, 316–327.
- Sandoval, J., Kelly, R., 2013. Diseño de un nuevo ida-pbc para la estabilización del sistema carro-péndulo. *Congreso Internacional de Robótica y Computación, Los Cabos, Baja California Sur, México*.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., 2011. Interconnection and damping assignment passivity-based control of a class of underactuated mechanical systems with dynamic friction. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 21, 738–751.
- Santhakumar, M., Asokan, T., 2010. A self-tuning proportional-integral-derivative controller for an autonomous underwater vehicle, based on taguchi method. *J. Comput. Sci.* 6, 862–871.
- Shi, Y., Qian, W., Yan, W., Li, J., 2007. Adaptive depth control for autonomous underwater vehicles based on feedforward neural networks. *International Journal of Computer Science and Applications* 4, 107–118.
- Valentinis, F., Donaire, A., Pérez, T., 2013. Control of an underactuated-slender-hull unmanned underwater vehicle using port-hamiltonian theory. *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Wollongong, Australia*, 1546–1551.
- Valentinis, F., Donaire, A., Pérez, T., 2015a. Energy-based guidance of an underactuated unmanned underwater vehicle on a helical trajectory. *Control Engineering Practice* 44, 138–156.
- Valentinis, F., Donaire, A., Pérez, T., 2015b. Energy-based motion control of a slender hull unmanned underwater vehicle. *Ocean Engineering* 104, 604–616.
- Yüksel, B., Secchi, C., Bühlhoff, H. H., Franchi, A., 2014. Reshaping the physical properties of a quadrotor through ida-pbc and its application to aerial physical interaction. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Hong Kong, China*, 6258–6265.